EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

Varianta ….005

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze distanța dintre punctele $A(1,2,3)$ și $B(3,2,1)$.

(4p) **b)** Să se determine centrul de greutate al unui triunghi cu vârfurile în punctele $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(2,2)$.

(4p) **c)** Să se calculeze aria cercului de ecuație $(x-2)^2+(y-3)^2=10$.

(4p) **d)** Să se determine modulul numărului complex $\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\cdot\sin\frac{\pi}{5}\right)^{10}$.

(2p) **e)** Să se determine numărul punctelor de intersecție dintre parabolele $y^2=4x$ și $x^2=4y$.

(2p) **f)** Să se determine numărul soluțiilor din intevalul $[0,2\pi]$ ale ecuației $\sin x=1$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $\lg(x^2+1)=1$.

(3p) **b)** Pentru funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+1$, să se calculeze suma $f(1)+f(2)+...+f(10)$.

(3p) **c)** Să se determine probabilitatea ca alegând o funcție din mulțimea funcțiilor definite pe mulțimea $\{1,2\}$ cu valori în mulțimea $\{1,2,3\}$, aceasta să fie injectivă.

(3p) **d)** Să se determine al zecelea termen al unei progresii geometice cu primul termen 1024 și cu rația $\frac{1}{2}$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma coeficienților dezvoltării $(2x+1)^4$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^x-x-1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0)$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se arate că $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x)\geq 0$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $H=\left\{ f\in \mathbf{Q}[X] \mid f\left(\sqrt[3]{2}\right)=0 \right\}$

(4p) **a)** Să se arate că polinomul nul $f=0$ este în *H*.

(4p) **b)** Să se arate că polinomul X^3-2 este din *H*.

(4p) **c)** Să se arate că dacă $f_1,\ f_2\in H$, atunci $f_1-f_2\in H$.

(2p) **d)** Să se demonstreze că dacă $a,b,c\in \mathbf{Q}$ și $a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c=0$ atunci $a=b=c=0$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $g\in \mathbf{Q}[X]$ şi $grad(g)=1$ sau $grad(g)=2$, atunci $g\notin H$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $grad(f)=3$ şi $f\in H$, atunci există $a\in \mathbf{Q}^*$ astfel încât $f=a\cdot\left(X^3-2\right)$.

(2p) **g)** Să se arate că $H=\left\{\left(X^3-2\right)\cdot q \mid q\in \mathbf{Q}[X]\right\}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f:(0,\infty)\to \mathbf{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{x}{x+1}$ şi $g:(0,\infty)\to \mathbf{R}$, $g(x)=f'(x)$.

(4p) **a)** Să se arate că $g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$, $x>0$.

(4p) **b)** Să se arate că funcția g este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.

(4p) **c)** Să se arate că $g(x)\ge 0$, $\forall x>0$.

(2p) **d)** Utilizând eventual metoda inducției matematice, să se arate că
$\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$, $\forall\, n\in \mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Utilizând teorema lui *Lagrange*, să se arate că $\forall\, n\in \mathbf{N}^*$ există $c_n\in(n,n+1)$ astfel încât $g(c_n)=f(n+1)-f(n)$.

(2p) **f)** Să se arate că $g(n+1)<f(n+1)-f(n)<g(n)$, $\forall\, n\in \mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se arate că $\dfrac{n}{2(n+2)}<\ln\dfrac{2n+2}{n+2}<\dfrac{n}{n+1}$, $\forall\, n\in \mathbf{N}^*$.